For more free Study material
visit : www.sbgstudy.com

Matter waves (de-brogli equation)

→ डी-ब्रोगली के अनुसार, किसी भी पदार्थ का संवेग p (कण प्रवृत्ति) तथा डी-ब्रोगली तरंगदैर्ध्य λ (तरंग प्रवृत्ति) निम्न समीकरण द्वारा संबंधित है:-

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

यदि किसी पदार्थ की डी-ब्रोगली तरंगदैर्ध्य पदार्थ के आकार की तुलना में नगण्य है तो यह कण प्रवृत्ति प्रदर्शित करेगा।

✓ यदि डी-ब्रोगली तरंगदैर्ध्य पदार्थ के आकार के तुलनात्मक है तो वह तरंग प्रकृति प्रदर्शित करता है।

→ किसी एक प्रयोग में, पदार्थ केवल एक ही प्रवृत्ति प्रदर्शित करता है।

eg. YDSE में प्रकाश तरंग प्रकृति परंतु प्रकाश विद्युत प्रभाव में करता कण कण प्रवृत्ति प्रदर्शित करता है।

→ डी-ब्रोगली तरंगदैर्ध्य के संगत तरंगों को द्रव्य तरंगें (matter waves) कहते हैं। इन तरंगों को भौतिक अस्तित्व नहीं होता।

उदाहरण- यह मानिये कि हमारे भौतिक विज्ञान के अध्यापक का द्रव्यमान 40kg है तथा वह 10m/sec से चल रहे हैं। ज्ञात कीजिए कि वह तरंग है या कण? (→ चिरसम्मित कण।)

Ans.

$$\lambda = \frac{h}{mv}$$

$$= \frac{6.6\times10^{-34}}{40\times10}$$

$$= 10^{-36}\ \text{wt.}]$$ कण प्रवृत्ति प्रदर्शित करेगें।

Note: $\lambda = \frac{h}{p}$ चिरसम्मित तथा सापेक्षिक दोनों कणों के लिए लागू है परंतु

$\lambda = \frac{h}{mv}$ केवल चिरसम्मित कणों के लिए लागू है।

For more free Study material
visit : www.sbgstudy.com

7/2/17

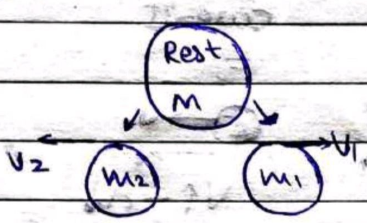
$F_{ext.} = zero$

Q. ** m द्रव्यमान का एक नाभिक विरामावस्था में स्थित है। आंतरिक बल के कारण यह दो अलग-२ द्रव्यमानों में टूट जाता है जिनके वेग अशून्य है। दोनों कणों की डी-ब्रोगली तरंगदैर्ध्य का अनुपात ज्ञात कीजिए।

Soln

(संवेग संरक्षण)

✓ $F_{ext.} = zero$



$P_i = P_f$

$\Rightarrow 0 = m_1v_1 - m_2v_2$

$\Rightarrow m_1v_1 = m_2v_2$

$\lambda_1 = \frac{h}{m_1v_1}$; $\frac{h}{m_2v_2} = \lambda_2$

$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = 1:1$

Note: उपरोक्त स्थिति में दोनों कणों की डी-ब्रोगली तरंगदैर्ध्य बराबर है परंतु संवेग सदिश बराबर नहीं है।

$|m_1v_1| = |m_2v_2|$ but $m_1\vec{v_1} \neq m_2\vec{v_2}$

✓ उपरोक्त स्थिति में, आंतरिक बल द्वारा किया गया कार्य zero नहीं है।

$\Delta KE = W_{ext.} + W_{int.}$ ($W_{ext.} = 0$)

$W_{int.} = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2$

→ यदि M द्रव्यमान का नाभिक दांयी ओर गतिशील है तो बांयी ओर प्रक्षेपित कण की डी-ब्रोगली तरंगदैर्ध्य दांयी ओर प्रक्षेपित कण से अधिक होगी।

Q. * एक गतिशील कण का वेग 4 गुना कर दिया जाता है जिससे उसकी गतिज ऊर्जा भी 4 गुना हो जाती है। डी-ब्रोगली तरंगदैर्ध्य में परिवर्तन ज्ञात कीजिए।

Soln

$K = \frac{1}{2}mv^2$ (v → 4 गुना, v^2 → 4×4)

तो $m' = \frac{m}{4}$; $\lambda = \frac{h}{mv}$

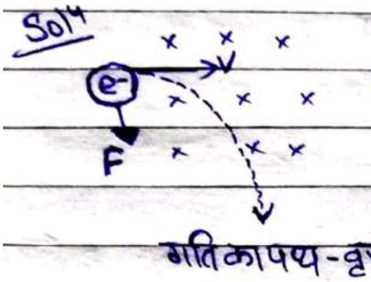
$\lambda' = \frac{h}{\frac{m}{4}4v}$

$\Delta\lambda = zero$

For more free Study material
visit : www.sbgstudy.com

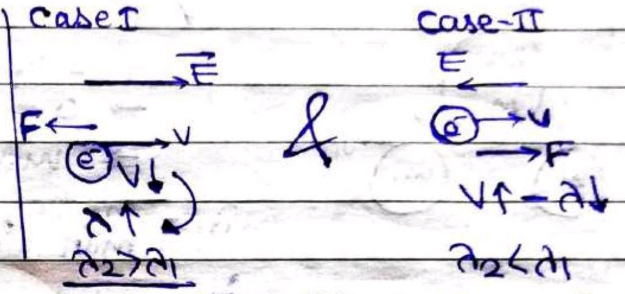
Q. २e समान चाल से गतिशील है। एक e समान चु.क्षेत्र में परस्पर लंबवत प्रवेश करता है तथा दूसरा e समान विद्युत क्षेत्र मे प्रवेश करता है। दोनों e के की डी-ब्रोगली तंरगदैर्ध्य में संबंध ज्ञात कीजिए।

Sol^n



$|v| = const.$

$\lambda = \frac{h}{mv} = const.$



→ चुंबकीय क्षेत्र में e की चाल तथा डी-ब्रोगली तंरगदैर्ध्य नियत रहेगी।

Note: → यदि चुंबकीय क्षेत्र परिवर्ती है तो विद्युतक्षेत्र प्रेरित होता है जिसके कारण चाल तथा डी ब्रोगली तंरगदैर्ध्य परिवर्तित होगी।

* डी-ब्रोगलीतंरगदैर्ध्य तथा गतिज ऊर्जा के मध्य संबंध-

$$K = \frac{1}{2}mv^2$$

$$2mK = m^2v^2 = p^2$$

$$K = \frac{p^2}{2m} \quad ; \quad p = \sqrt{2mK}$$

**

$$\boxed{\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2mK}}}$$

Q. एक e तथा photon की डी-ब्रोगली तंरगदैर्ध्य λ बराबर है। electron तथा photon की ऊर्जाओं का अनुपात ज्ञात कीजिए।

Sol^n same ← $\lambda = \frac{h}{p}$

$$p_e = p_{ph} = \frac{h}{\lambda} = p$$

$$E_e = \frac{p^2}{2m} \quad \text{(चिरसम्मित कण)}$$

$$E_{ph} = pc \quad \Rightarrow \quad \frac{E_e}{E_{ph}} = \frac{p^2}{2mpc}$$

$$= \frac{p}{2mc}$$

$$= \frac{h}{2mc\lambda}$$

For more free Study material
visit : www.sbgstudy.com

Q. e⁻ तथा photon की ऊर्जा E समान है। दोनों की डी-ब्रोग्ली तरंगदैर्ध्य का अनुपात ज्ञात कीजिए।

Sol

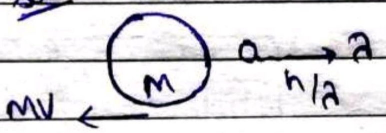
$E_{ph} = \frac{hc}{\lambda_{ph}} \Rightarrow \lambda_{ph} = \frac{hc}{E}$ — (i) $(\lambda_{ph} \propto 1/E)$

$E_e = \frac{p^2}{2m} = \frac{h^2}{\lambda_e^2 2m} \Rightarrow \lambda_e = \frac{h}{\sqrt{2mE}}$ — (ii) $\Rightarrow \lambda_e \propto \frac{1}{\sqrt{E}}$

✓ $\frac{\lambda_e}{\lambda_p} = \frac{\sqrt{E}}{\sqrt{2mc^2}}$

Q. m द्रव्यमान का एक नाभिक विरामावस्था में स्थित है तथा यह λ तरंगदैर्ध्य का एक photon उत्सर्जित करता है। नाभिक की प्रतिक्षेप ऊर्जा ज्ञात कीजिए।

Sol



$mv = \frac{h}{\lambda}$ (संवेग संरक्षण)

$v = \frac{h}{m\lambda}$

$RE = \frac{1}{2}mv^2$

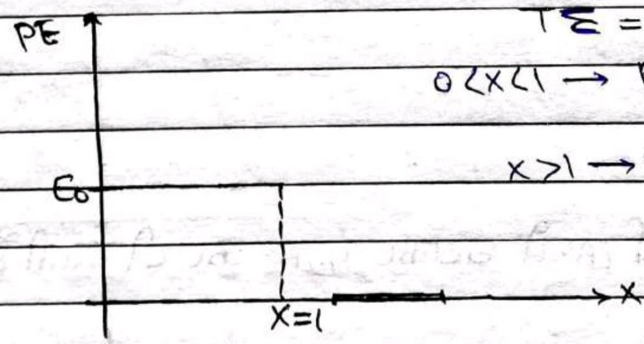
$= \frac{1}{2}m\frac{h^2}{m^2\lambda^2}$

$= \frac{1}{2}\frac{h^2}{m\lambda^2}$

(P)

8/2/17

Q. चित्रानुसार एक कण की स्थितिज ऊर्जा तथा स्थिति के मध्य वक्र प्रदर्शित है & कण की कुल ऊर्जा $2E_0$ है। $0<x<1$ तथा $x>1$ के मध्य कण की डी-ब्रोग्ली तरंगदैर्ध्य का अनुपात ज्ञात कीजिए।



$TE = PE + KE$

$0<x<1 \rightarrow PE = E_0$ तो $KE_1 = E_0$

$TE = 2E_0$

$x>1 \rightarrow TE = 2E_0$ & $PE = 0$ तो $KE_2 = 2E_0$

$\frac{K_1}{K_2} = \frac{1}{2}$

$\lambda \propto \frac{1}{\sqrt{K}}$

$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \sqrt{\frac{K_2}{K_1}}$

$= \sqrt{2} : 1$

For more free Study material
visit : www.sbgstudy.com

Q. एक e के संवेग में p परिवर्तन होता है ⇒ यदि de-broglie तरंगदैर्ध्य 0.5% परिवर्तित होती है तो e का प्रारंभिक संवेग ज्ञात कीजिए।

Ans:
$$\lambda = \frac{h}{p}$$
$$\Rightarrow \frac{\Delta\lambda}{\lambda} \times 100 = -\frac{\Delta p}{p} \times 100$$
$$\Rightarrow 0.5 = -\frac{p}{p_i} \times 100$$
$$\Rightarrow p_i = 200p$$

→ डी-ब्रोगली तरंगदैर्ध्य तथा वोल्टेज के मध्य संबंध –

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2mKE}}$$

q आवेश को V विभवांतर से त्वरित किया जाये $K = qV$

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2mqV}}$$

$$\lambda_e = \frac{12.27}{\sqrt{V}}$$
$$\lambda_\alpha = \frac{0.101}{\sqrt{V}}$$
$$\lambda_p = \frac{0.286}{\sqrt{V}}$$
$$\lambda_D = \frac{0.202}{\sqrt{V}}$$

Q. 1A° तरंगदैर्ध्य के e की (de-broglie तरंगदैर्ध्य 1A° वाले e की) ऊर्जा ज्ञात कीजिए।

Sol^n
$$\lambda_e = \frac{12.27A^\circ}{\sqrt{V}}$$
$$\Rightarrow 1A^\circ = \frac{12.27A^\circ}{\sqrt{V}}$$
$$\Rightarrow V = (12.27)^2$$
$$= 150\,Volt$$
$$E = 150\,eV$$

Q. एक e की de-broglie तरंगदैर्ध्य 1A° से घटाकर 1/2A° कर दी जाती है। ऊर्जा में % परिवर्तन?

Ans.
$$\lambda_e^2 = \frac{150}{V}$$
$$\left(\frac{1}{2}\right)^2$$
$$\lambda = 1A^\circ \Rightarrow V_1 = 150V \;\&\; E_1 = 150eV$$
$$\lambda = 1/2A^\circ \Rightarrow V_2 = 600V \;\&\; E_2 = 600eV$$
$$\frac{\Delta E}{E} \times 100 = \frac{450eV}{150eV} \times 100$$
$$= 300\%$$

For more free Study material
visit : www.sbgstudy.com

Q. एक α-कण की डी-ब्रोग्ली तरंगदैर्घ्य 0.02A° है। α-कण की गतिज ऊर्जा ज्ञात कीजिए।

Ans:

$$\lambda_\alpha = 0.02A^\circ = \frac{0.1}{\sqrt{V}}$$

$$\Rightarrow V = 25\ \text{Volt}$$

$$E_\alpha = 2eV = 50eV$$ (α-कण का आवेश 2e होता है)

→ डी-ब्रोग्ली तरंगदैर्घ्य तथा तापमान के मध्य-

$$K = \frac{3}{2}k\,\text{temp.}$$

$k = 1.38\times10^{-23}$ J/Kelvin → Boltzmann const.

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2mK}} \rightarrow \boxed{\frac{3}{2}kT}$$

$$\boxed{\lambda = \frac{h}{\sqrt{3mkT}}}$$

$$\boxed{\lambda_e = \frac{\log 6}{\sqrt{T}}} \qquad \boxed{\lambda_p, \lambda_n = \frac{25.6A^\circ}{\sqrt{T}}} \qquad \boxed{\lambda_{gas} = \frac{25.6}{\sqrt{AT}}}$$

→ diatomic complex dry

A → gas का molecular weight

Q. 1A° तरंगदैर्घ्य के neutron की ऊर्जा ज्ञात कीजिए।

Sol^n

$$\lambda_n = \frac{25.6}{\sqrt{T}} \Rightarrow T = \frac{25.6\times25.6}{\lambda_n^2} \rightarrow 1A^{\cdot 2}$$

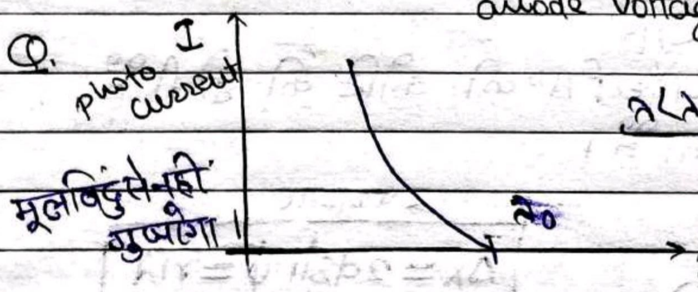
$$= 655.36$$

$$KE = \frac{3}{2}kT = \frac{3}{2}\times1.38\times10^{-23}\times655.36\ \text{Joule}$$

$$= 1356.59\times10^{-23}$$

anode voltage – const.

Q.



$\lambda < \lambda_0$

For more free Study material
visit : www.sbgstudy.com

→ डी-ब्रोग्ली तरंगदैर्ध्य का सारांश -

ph, e^-: $\lambda = \frac{h}{p}$ → $p = mv$

e^-: $\lambda = \frac{h}{mv}$ → $mv = \sqrt{2mk}$; $\frac{p^2}{2m} = k$, $p = \sqrt{2mk}$

$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2mk}}$ → $k = qV$ → $\lambda = \frac{h}{\sqrt{2mqV}}$ (A°)

- $\lambda_\alpha = \frac{0.101}{\sqrt{V}}$
- $\lambda_e = \frac{12.27}{\sqrt{V}}$
- $\lambda_p = \frac{0.286}{\sqrt{V}}$
- $\lambda_d = \frac{0.202}{\sqrt{V}}$ (A°) ; V → volt

$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2mk}}$ → $k = \frac{3}{2}kT$ → $\lambda = \frac{h}{\sqrt{3mkT}}$

- A° ← $\lambda_e = \frac{1096}{\sqrt{T}}$ → Kelvin
- $\lambda_{p,n} = \frac{25.6}{\sqrt{T}}$
- $\lambda_{gas} = \frac{25.6}{\sqrt{AT}}$; A → द्रव्यमान

* e^- विवर्तन प्रयोग -

किसी भी अवरोधक के कोनों से तरंगें मुड़ जाती है। इस परिघटना को विवर्तन कहते हैं।

→ विवर्तन के लिए तरंग की तरंगदैर्ध्य की कोटि तथा अवरोधक के आकार की कोटि लगभग समान होनी चाहिए। इसी कारण, ध्वनि तरंगों का विवर्तन आसानी से प्रेक्षित किया जाता है।

$\lambda_{sound} \sim m$

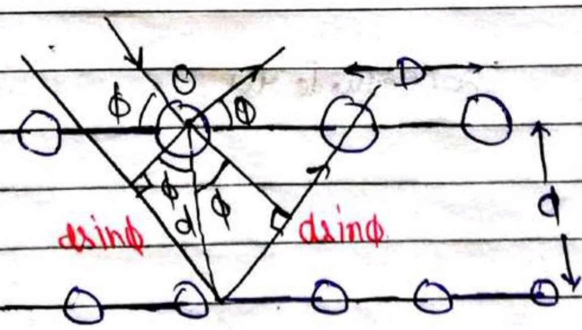
$\lambda_{light} \sim A°$

→ प्रकाश तरंगें तथा e^- पुंज की तरंगदैर्ध्य A° की कोटि की होती है अर्थात् यह क्रिस्टल में विवर्तित होता है।

9/2/19

$2\phi + \theta = 180°$

$\phi = 90 - \frac{\theta}{2}$



पथान्तर

$\Delta x = 2d\sin\phi = n\lambda$

$D\sin\theta = n\lambda$

जहाँ D - दो atoms के मध्य दूरी

d - दो परमाण्विक तापों के मध्य दूरी

n - विवर्तन की कोटि

θ - विवर्तन कोण

φ - पृष्ठस्पर्शी कोण,

For more free Study material
visit : www.sbgstudy.com

Q. एक e^- विवर्तन प्रयोग में दो परमाणुओं के मध्य दूरी 1.227 A° है तथा e को 10kV से त्वरित किया जाता है। विवर्तन की अधिकतम कोटि ज्ञात करो तथा 5^{th} विवर्तन की कोटि के लिए पृष्ठस्पर्शीय कोण ज्ञात कीजिए।

Sol^n

$D = 1.227 A°$

$D\sin\theta = n\lambda$

$\Rightarrow (1.227)\sin\theta = n\frac{12.27}{\sqrt{10\times1000}}$

$\Rightarrow \sin\theta = \frac{n}{10} \longrightarrow n_{max.} = 10 \quad (\sin\theta \to max. = 1)$

अर्थात् $n_{max.} = 10$

✓ 5^{th} विवर्तन कोटि हेतु

$\sin\theta = \frac{5}{10} = 1/2$

$\theta = 30°$

तो $\phi = 90 - \theta/2$

$= 75°$

Q. e विवर्तन प्रयोग में, विवर्तन कोण 50° प्राप्त किया जाता है। यदि e की de-broglie तरंगदैर्ध्य 1.5A° है तो दोनों परमाणुओं के मध्य दूरी ज्ञात कीजिए।

Sol^n

$D\sin\theta = n\lambda$

$\Rightarrow D = \frac{1\times\lambda}{\sin 50°}$

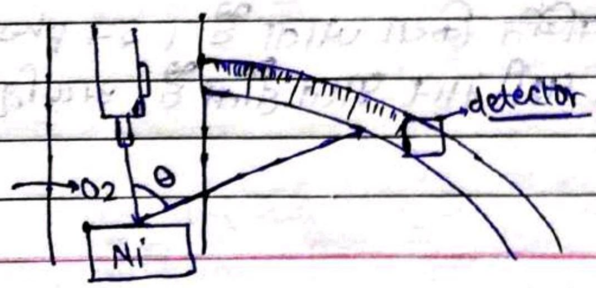
$= \frac{1\times1.5A°}{3/4}$

$= 2A°$

$\sin 50° = 3/4$
$\sin 30° = 1/2$
$\sin 42° = 2/3$
diamond का क्रांतिक कोण $\simeq 20°$
$\sin 53° = 4/5$

विवर्तन ✓
↑
e-की तरंग प्रकृति
↑

→ डेविसन-जर्मर प्रयोग–



At 54Volt & 50°θ

Bragg's eq.

$D\sin\theta = n\lambda$

↑ 2.15A° , 50°

de-broglie

$\lambda_e = \frac{12.27}{\sqrt{V}} \leftarrow 54V$

$= 0.166nm$

$\lambda = 0.166nm$

For more free Study material
visit : www.sbgstudy.com

निष्कर्ष –

(i) यह प्रयोग e की तरंग प्रकृति स्थापित करता है।

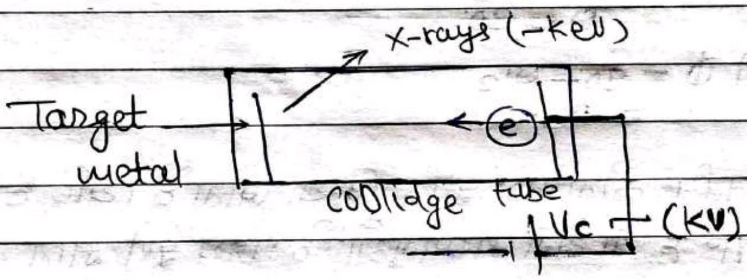
(ii) e के लिए de-broglie का समीकरण लागू है।

X-rays :- (1.) वह photon जिनकी ऊर्जा kev की कोटि की होती है, उन्हें x-किरणें कहते हैं।

(2.) x-rays की भेदन क्षमता अधिक होती है, परंतु γ किरणों से कम होती है।

(3.) x-किरणें परमाण्विक स्तर से उत्पन्न की जाती हैं, परंतु γ किरणें नाभिक के भीतर से उत्पन्न की जाती हैं।

(4.) x-rays का उत्पादन coolidge tube से किया जाता है।



→ x-rays दो प्रकार की होती हैं:-

(i) सतत x-किरणें - continuous x-rays – इन x-rays में लगातार सभी तरंगदैर्घ्यों के मान प्राप्त किये जाते हैं।

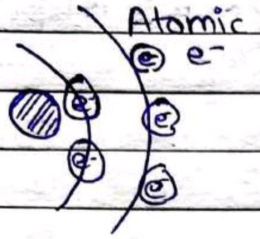
(ii) अभिलाक्षणिक x-किरणें - characteristic x-rays - इन x-rays में तरंगदैर्घ्य के कुछ निश्चित मान ही प्राप्त किये जाते हैं।

✗ सतत x- किरणें-

त्वरित e लक्ष्य धातु के परमाण्विक e's की ओर अग्रसर होता है। इन परमाण्विक e's के प्रतिकर्षण के कारण त्वरित e की energy का कुछ भाग photon के रूप में उत्सर्जित किया जाता है। इन photons की ऊर्जा तथा तरंगदैर्घ्य का लगातार सभी मान प्राप्त होता है, अर्थात इन्हें सतत x-rays कहते हैं।

For more free Study material
visit : www.sbgstudy.com

→



$$\Delta E_{max} = \frac{hc}{\lambda_{min}}$$

$$\rightarrow \lambda_{min} = \frac{hc}{\Delta E_{max}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\lambda_{min} = \frac{hc}{eV_c} = \frac{12400V\,A^\circ}{V_c}}$$

✓ अधिकतम ऊर्जा के photon के संगत न्यूनतम तरंगदैर्ध्य प्राप्त की जाती है। इस न्यूनतम तरंगदैर्ध्य को अंतक तरंगदैर्ध्य (cut off wave length) कहते हैं।

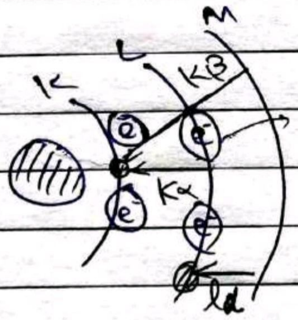
→ यदि वोल्टेज बढ़ाया जाता है तो λ_{min} घट जाता है तथा x-rays की तीव्रता अपरिवर्तित रहती है।

→ x-rays की तीव्रता केवल प्राप्त photons की संख्या पर निर्भर करती है अर्थात् जब परिपथ में धारा बढ़ती है तो x-rays की तीव्रता बढ़ जाती है।

10/2/17

✗ अभिलाक्षणिक x-किरणें -

जब त्वरित e लक्ष्य धातु के परमाणु से किसी आंतरिक e को आयनीकृत कर e को निष्कासित कर देता है तो परमाणु में इस रिक्त की पूर्ति के लिए उच्च स्तर से e नीचे संक्रमित हो जाता है। इस ऊर्जा में अंतर के संगत निश्चित तरंगदैर्ध्य का photon प्राप्त किया जाता है। इसे अभिलाक्षणिक x-ray कहते हैं।



$$[\lambda_{L\alpha} > \lambda_{K\alpha} > \lambda_{K\beta}]$$

$$E_L - E_K = \frac{hc}{\lambda_{K\alpha}}$$

$$E_M - E_K = \frac{hc}{\lambda_{K\beta}}$$

$$E_M - E_L = \frac{hc}{\lambda_{L\alpha}}$$

जोड़ने पर

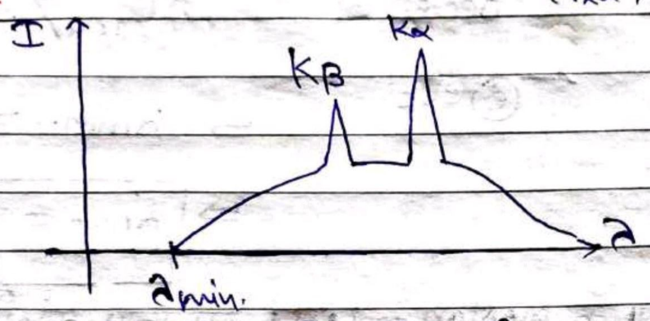
$$\boxed{\frac{1}{\lambda_{L\alpha}} + \frac{1}{\lambda_{K\alpha}} = \frac{1}{\lambda_{K\beta}}}$$

*

→ लक्ष्य धातु भारी होता है क्योंकि परमाण्विक स्तरों की ऊर्जा keV की कोटि की होनी चाहिए $\left(E = -13.6 \times \frac{Z^2}{n^2}\right)$ इसी कारण Hydrogen x-ray उत्पन्न नहीं करता।

For more free Study material
visit : www.sbgstudy.com

→ **X-ray Spectrum -** — $\lambda_{L\alpha} > \lambda_{K\alpha} > \lambda_{K\beta}$



→ $K\alpha$ के प्राप्त photons की संख्या, $K\beta$ से अधिक है।

→ **Moseley's Rule -** $\frac{1}{\lambda} \propto Z^2$

$f \propto Z^2$

$\boxed{\sqrt{f} \propto Z}$; $\{\sqrt{f} = a(Z-b)\}$

→ $K\alpha$ की तरंगदैर्ध्य ज्ञात करने के लिए मोसले का समीकरण प्रयुक्त किया जाता है।

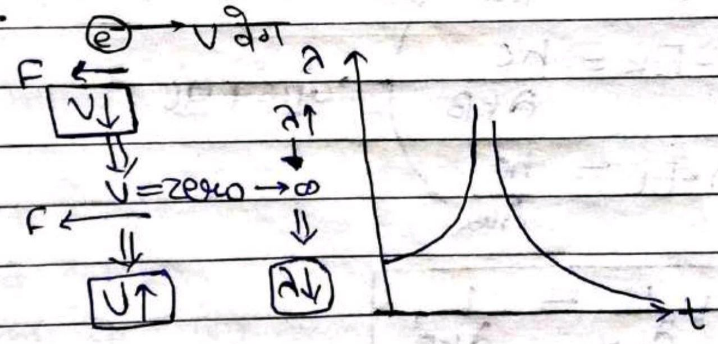
→ नील बोहर का नियम x-rays के लिए लागू नहीं होता क्योंकि लक्ष्य $\left(\frac{1}{\lambda} = RZ^2\left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2}\right)\right)$ धातु simple निकाय नहीं है।

✓ विभेदन क्षमता $\propto \frac{1}{\lambda}$

✓ फ्रिंज चौड़ाई $(\beta) \propto \lambda$

→ E तो λ & t के मध्य graph?

Q.



$v=0$, $a=-g$

$a = v\frac{dv}{dx}$

$\boxed{a = zero}$?